Die Bedeutung von Volatilitätsprognosen, Verteilungsschätzungen und Portfoliobewertung im Rahmen von Value at Risk-Modellen

Engelbert J. Dockner
Institut für Betriebswirtschaftslehre
Universität Wien
Brünnerstraße 72
A-1210 Wien

Peter Harold
Creditanstalt Bankverein
Technisches Zentrum
Julius Tandlerplatz 7
A-1090 Wien

Zusammenfassung

Das Konzept Value at Risk (VaR) scheint sich als Standard im Rahmen von internen Risikomanagementmodellen in der Praxis durchzusetzen. Als quantitatives Risikomaß setzt es sich aus einem Volatilitätsmaß, der Modellierung von Verteilungen von Wertpapierrenditen und einem Bewertungsmodell zusammen. Die vorliegende Arbeit untersucht nun empirisch welche Bedeutung diese Komponenten für den VaR eines einfachen Aktienportefeuilles haben. Dabei zeigt sich, daß die Wahl des Volatilitätsmaßes keinen signifikanten Einfluß auf die Ermittlung des VaR für ein Aktienportefeuille hat. Sowohl die Annahme über die Verteilung der Aktienrenditen als auch der Bewertungsansatz mit dem das Aktienportefeuille abgebildet wird, können gravierende Änderungen im VaR nach sich ziehen. Diese Ergebnis läßt daher den Schluß zu, daß bei der Ermittlung der Eigenkapitalvorsorge im Rahmen der Kapitaladäquanzrichtlinie die Wahl des geeigneten Bewertungsmodells als auch der Verteilungsfunktion von großer Bedeutung sind.

Die Forschungsarbeiten von Professor Dockner werden durch den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung SFB # 010 ("Adaptive Information Systems and Modelling in Economics and Management Science") unterstützt.

1. Einleitung

Fundamentale technologische Veränderungen haben in den letzten Jahren zu zunehmender Spezialisierung und Globalisierung der ökonomischen Aktivitäten geführt. Diese Entwicklung hat in Verbindung mit der Deregulierung der Finanzmärkte zu einer überproportionalen Erhöhung der Finanz- relativ zu den Handelsströmen geführt. Die dadurch erhöhten Marktrisiken haben eine rasant zunehmende Nachfrage nach Finanzinstrumenten geschaffen, mit deren Hilfe das Risikomanagement effizient durchgeführt werden kann. Derivative Finanzinstrumente bieten in dieser Hinsicht einige signifikante Vorteile, da durch sie ein zielgerichtetes Steuern von Marktrisiken ohne ein gleichzeitiges in Kaufnehmen von nicht gewollten Kredit- und Liquiditätsrisiken möglich ist. Zusätzlich ergeben sich durch den Einsatz derivativer Instrumente Geschäftsmöglichkeiten wie z.B. Leerverkäufe, die durch traditionelle Kassa- und Termintransaktionen nur erschwert durchgeführt werden können.

Neben den erwähnten Vorteilen bringen derivative Instrumente aufgrund ihrere Komplexität und des hohen Leverage in Verbindung mit schlecht ausgebauten Risikosystemen allerdings auch Gefahren mit sich, wie einzelne Finanzdesasters der letzten Jahre (z.B. Barings, Metallgesellschaft, Nat West) demonstriert haben. Als Reaktion darauf gibt es Initiativen von regulierenden Behörden, die eine Begrenzung des Marktrisikos von Kreditinstituten und Wertpapierfirmen zu bewirken versuchen. Letzteres wird unter anderem dadurch erreicht, daß die Eigenmittelanforderungen eines Kreditinstitutes laut EU-Kapitaladäquanzrichtlinie mit dem Marktrisiko ihres Handelsbuches zunimmt. Während in der EU-Richtlinie die Quantifizierung des Marktrisikos von Wertpapierportefeuilles in Form der Standardmethode genau vorgegeben ist, scheint sich in der Bankpraxis das Konzept **Value at Risk** als Standard durchzusetzen.[1] Der Value at Risk einer Wertpapierposition[2] ist jener maximale Verlust, der innerhalb einer Periode unter 'normalen' Marktbedingungen (d.h. mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit) nicht überschritten wird. Aus statistischer Sicht kann der Value at Risk als einseitiges Konfidenzintervall aufgefaßt werden. Damit hängt sein Wert von der Spezifikation der Verteilung der Renditen[3] und dem Volatilitätsmodell ab. Werden zudem die Renditen eines Portfeuilles über ein Bewertungsmodell (z.B. dem CAPM oder dem Marktmodell) erklärt, muß dieses auch bei der Ermittlung des Value at Risk berücksichtigt werden.[4]

Die vorliegende Arbeit hat sich nun die Zielsetzung gestellt, die Bedeutung dieser drei Bausteine für die Quantifizierung des Marktrisikos von Wertpapierpositionen zu analysieren [siehe auch Bühler et al. (1997)]. Dabei unterstellen wir die Sicht eines Kreditinstituts und fragen, durch welche Modellkomponenten die entsprechenden Eigenkapitalanforderungen am geringsten ausfallen. In diesem Sinne versucht die Arbeit einen wertvollen Beitrag für die Praxis zu liefern, indem aus den empirischen Ergebnissen Schlüsse für die Verwendung alternativer Verfahren gezogen werden können.

Im einzelnen beschäftigen wir uns mit folgenden Teilkomponenten eines VaR-Modells. Für die Volatilitätsprognose verwenden wir drei alternative Verfahren: (i) die naive Volatilität (d.i. gleitender Durchschnitt mit einem konstanten Fenster und konstanten Gewichten), (ii) das exponentiell gewichtete Moving-Average-Modell (EWMA), das besonders im Rahmen von RiskMetrics™ angewendet wird, und ein GARCH(1,1)-Modell. Für die untersuchten Aktienportefeuilles zeigt sich, daß die Güte der Volatilitätsprognose der drei Modelle nicht unterscheidbar ist, und keinen signifikanten Unterschied bei der Quantifizierung des Marktrisikos nach sich zieht.

Bei der Spezifikation der Verteilung der Wertpapierrenditen betrachten wir zwei alternative Ansätze. Einerseits verwenden wir die Annahme normalverteilter Renditen, andererseits schätzen wir die Verteilung empirisch mit einem Kernel-Schätzer und vergleichen die Ergebnisse. Dabei sind die Resultate nicht überraschend. Die Normalverteilung ist nicht in der Lage die empirischen Regularitäten in den Daten zu beschreiben. Die empirische Verteilung der Renditen weist eine viel höhere Kurtosis als jene der Normalverteilung auf und hat daher auch mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in den Rändern. Somit wird durch die Annahme normalverteilter Renditen der VaR systematisch unterschätzt. Aus diesem Grund scheint die Einführung eines Stressfaktors, wie er durch den Basler Ausschuß vorgeschlagen und im Rahmen der BWG-Novelle in Österreich realisiert wird, gerechtfertigt. Die in der BWG-Novelle vorgeschlagene Größenordnung des Streßfaktors (er muß zwischen 3 und 4 liegen) kann jedoch empirisch nicht begründet werden.

---

[1] Vgl. Jorion (1996).

[2] Da wir in der vorliegenden Arbeit ausschließlich das Marktrisiko von Aktien analysieren, sprechen wir in der Folge von Wertpapierpositionen. Das Konzept Value at Risk gilt jedoch für sämtliche Marktrisikopositionen.

[3] Die Rendite einer Aktie wird in dieser Arbeit als jener Ertrag bezeichnet, der sich aus den täglichen, dividendenbereinigten Kursänderungen ergibt.

[4] Eine detaillierte Ausführung dazu findet sich in Abschnitt 3 der Arbeit.

Schließlich untersuchen wir noch den Einfluß alternativer Bewertungsmodelle für die Quantifizierung des VaR. Da wir in dieser Arbeit nur Portefeuilles aus Aktien heranziehen, stehen zwei alternative Bewertungsverfahren (Mapping-Verfahren) zu Auswahl. Im ersten Fall unterstellen wir perfekte Diversifikation und bewerten die einzelnen Aktien des Portefeuilles mit dem Marktmodell (β-Bewertung). Dabei wird unterstellt, daß das Marktrisiko einer einzelnen Aktie durch den β-Faktor über das Marktportefeuille erfaßt werden kann. Im zweiten Fall unterstellen wir, daß das Risiko des Portfeuilles über die Varianz-Kovarianz-Matrix der im Portefeuille befindlichen Wertpapiere gemessen werden kann. Auch hier zeigt sich ein großer Unterschied. Je nach Wahl des Aktienportefeuillies kann der Value at Risk auf Basis des Beta-Modells höher oder geringer sein als der Wert, der sich aus der Varianz-Kovarianzmatrix errechnet. Zusammenfassed lassen sich folgende Schlüsse ziehen: Während die Methode der Volatilitätsschätzung keinen großen Einfluß auf die Quantifizierung des Marktrisikos hat, sollten sowohl die Schätzung der Wertpapierrenditeverteilungen und die Wahl des Bewertungsansatzes mit Sorgfalt durchgeführt werden.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im nächsten Abschnitt werden das VaR Konzept und seine Teilkomponenten vorgestellt. Kapitel 3 präsentiert alternative VaR Modelle für Aktienportefeuilles. Kapitel 4 diskutiert unterschiedliche Maße zur Schätzung von Wertpapiervolatilitäten und im Kapitel 5 wird auf Basis österreichischer Daten eine empirische Analyse vorgestellt, in der der Einfluß der Volatilitätsprognose, des Bewertungsmodells und der Verteilungsschätzungen auf den VaR untersucht werden. Kapitel 6 beschließt die Arbeit.

2. Der Value at Risk einer Wertpapierposition

Folgt man einer Standarddefinition [cf. Jorion (1996)], gilt: *Value at Risk is the maximum amount one can expect to lose on a given position during a given period (the potential close-out period) with a predifined probability*. Diese Definition basiert auf statistischen Grundlagen und assoziiert mit dem Value at Risk ein einseitiges Konfidenzintervall.

Es sei S_t, die Ausprägung eines Risikofaktors[5] zum Zeitpunkt t. $\Delta S = S_t - S_{t-\Delta t}$ ist die Änderung des Niveaus des Risikofaktors im Zeitintervall Δt. Es sei nun $V(S_t,t)$ der Wert eines Portfolios zum Zeitpunkt t. Wenn das Portfolio derivative Finanzinstrumente mit dem Basisinstriument S enthält, dann hängt dessen Wert V vom laufenden Preis des Basisinstrument ab. Innerhalb der Periode Δ kann sich nun der Portfoliowert um $\Delta V(\Delta S,\Delta t)$ ändern, wobei ΔS die Änderung des Risikofaktors darstellt. Geht man nun von der Wertänderung ΔV aus, kann man den VaR wie folgt definieren [cf. Fallon (1996) und Beckström und Campbell (1995)]:

(1) $$\mathrm{Prob}[\Delta V(\Delta S,\Delta t) > \mathrm{VaR}] = 1 - \alpha$$

wobei α das zu spezifizierende Konfidenzniveau ist.

Aus dieser Definition wird deutlich, daß der VaR von drei Komponenten beeinflußt wird. (i) von der Verteilung der Risikofaktoren, (ii) vom Bewertungsmodell (i.e. insbesondere bei nichtlinearen Positionen) und auch (iii) von der Volatilität des Basisinstruments. Letzteres kann wie folgt anhand einer einfachen linearen Position erklärt werden $V = \delta S$. Es sei ΔS normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2, $\Delta S \sim N(0,\sigma^2)$. Dann ergibt sich:

(2) $$\Delta V = \delta\, \Delta S$$

und der Value at Risk für ein Konfidenzniveau α ergibt sich aus

(3) $$\mathrm{Prob}[\Delta V(\Delta S,\Delta t) > \mathrm{VaR}] = \mathrm{Prob}[\delta\, \Delta S > \mathrm{VaR}] = \mathrm{Prob}[\Delta S/\sigma > \mathrm{VaR}/\delta\sigma] = 1 - \alpha$$

Da in diesem Beispiel ΔS normalverteilt ist folgt für das Portfolio (2), daß es ebenfalls normalverteilt ist und die Quartile, $Z(\alpha)$, der Standardnormalverteilung ist durch

(4) $$Z(\alpha) = \mathrm{VaR}/\delta\sigma$$

gegeben. Damit ergibt sich für den Value at Risk

---

[5] Bei Aktien sind die Kurse, bei Anleihen die Zinssätze und bei Optionen u.a. die Kurse des Basisinstruments und die Volatilitäten die angesprochenen Risikofaktoren.

(5) $VaR = Z(\alpha)\, \delta\, \sigma.$

Aus Gleichung (5) ist nun ersichtlich, daß man für die Prognose des VaR über eine Halteperiode von Δt eine Prognose der Volatilität des Underlying S benötigt. Dieser Zusammenhang gilt für lineare wie nichtlineare Positionen. Im Fall von Optionen z.B. wird neben der Volatilitätsprognose eben auch noch ein Bewertungsmodell zur Quantifizierung des VaR benötigt. Möchte man allerdings diesen Schritt umgehen, kann man analog zu Gleichung (2) die Änderung des Werts der Option linear durch die Änderung im Underlying approximieren, wobei das Options-Delta, δ, dazu verwendet wird.
Aus diesen Überlegungen wird deutlich, daß der VaR einer Wertpapierposition von folgenden Faktoren bestimmt wird: (i) von der Spezifikation des Konfidenzniveaus, (ii) der Methode mit der die Volatilität prognostiziert wird, (iii) der Verteilung der Preisänderungen des Underlying und einem (iv) Bewertungsmodell. Dem letzten der genannten Aspekte wollen wir uns im folgenden Abschnitt zuwenden.

3. Alternative Value at Risk Modelle für Aktienportefeuilles

Im Kapitel 2 haben wir das Konzept Value at Risk in allgemeiner Form abgeleitet und dabei festgestellt, daß der Value at Risk einer Wertpapierposition von drei Faktoren wesentlich beeinflußt wird: (i) vom Verfahren zur Schätzung der Volatilität, (ii) dem Bewertungsmodell, das die Risikofaktoren auf die einzelnen Positionen abbildet und (iii) den Verteilungsannahmen, die über die Wertpapierrenditen getroffen werden. Da wir im nächsten Kapitel die Bedeutung alternativer Volatilitätsschätzer für die Quantifizierung des Risikos untersuchen werden, wenden wir uns in diesem Abschnitt dem zweiten Untersuchungsgegenstand der Arbeit zu, nämlich dem Einfluß alternativer Bewertungsmodelle auf den Value at Risk. Dabei beschränken wir uns auf Aktienportefeuilles mit Fließhandelswerten des österreichischen Aktienmarktes.

Das gängigste Verfahren im Rahmen von Value at Risk Modellen zur Bewertung von Risiken unterschiedlicher Aktienportefeuilles ist das sogenannte β-Mapping. Das β-Mapping basiert auf dem Marktmodell und hat folgende theoretische Begründung. Gemäß Marktmodell [Lintner (1965)] besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Wertpapierrendite einer Aktie und der Rendite des Marktportefeuilles:

(6) $R_{st} = \alpha + \beta_S R_{mt} + \varepsilon_t,$

wobei R_{st} die Rendite der Aktie S zum Zeitpunkt t, β_S den β-Faktor der Aktie S, R_{mt} die Rendite des Marktportefeuilles und ε_t, eine unsystematsiche Risikokomponente zum Zeitpunkt t darstellen. In einem gut diversifizierten Portfolio schwankt die unsystemische Risikokomponente nahe um Null, sodaß sich gemäß Marktmodell folgender Zusammenhang ergibt:

(7) $R_{st} \approx \alpha + \beta_S R_{mt},$

d.h. wir haben einen (hinreichend exakten) linearen Zusammenhang zwischen der Wertpapierrendite der Aktie S und dem Risikofaktor, die Rendite des Marktportefeuilles. Diese Ergebnisse können nun direkt für die Ermittlung des Value at Risk einfließen. Unter den Annahmen, daß die Rendite der Aktie S normalverteilt ist und das Konfidenzniveau mit 95 % festgelegt wird, ergibt sich der Value at Risk für ein Portfeuille, das nur aus der Aktie S besteht und dessen Wert in der laufenden Periode durch S_0 gegeben ist, aus der Beziehung

(8) $VaR = S_0\, 1.65\, \sigma_{S,}$

wobei σ_S die Volatilität der Aktie S darstellt. Unter der Annahme, daß das oben beschriebene Marktmodell Gültigkeit hat, kann die Volatilität der Aktie S auf jene des Marktportfolios zurückgeführt werden. Unter der Annahme, daß das unsystematische Risiko ε_t mit der Rendite des Marktportefeuilles unkorreliert ist, ergibt sich aus der Beziehung (6)

(9) $\sigma_S^2 = \beta_S^2\, \sigma_M^2 + \sigma_\varepsilon^2,$

wobei σ_M das Risiko des Marktes und σ_ε das unsystematische Risiko darstellen. Bei hinreichend guter Diversifikation kann das unsystematische Risiko vernachlässigt werden und es gilt die Beziehung

(10) $\sigma_S \approx \beta_S\, \sigma_M.$

Setzt man die letzte Beziehung in die Gleichung (8) ein, ergibt sich für den Value at Risk

(11) $VaR = S_0 \, 1.65 \, \beta_S \, \sigma_M$.

Damit ist es gelungen, über das β-Mapping den Value at Risk einer einzelnen Aktie auf einen Risikofaktor, nämlich die Rendite des Marktportefeuilles zu beziehen. Der Vorteil dieser Methode liegt darin begründet, daß sich dadurch auch sehr einfach der Value at Risk für ein ganzes Aktienportefeuille ermitteln läßt. Angenommen das Aktienportfeuille besteht aus den Aktien S_1 bis S_N. Unterstellt man, daß die Renditen dieser Aktien durch das Marktmodell erklärt werden, ergibt sich in Anlehnung an die obige Vorgangsweise der Value at Risk wie folgt:

(12) $VaR = W_0 \, 1.65 \, \sigma_M \, [\beta_{S1} + \beta_{S2} + ...+ \beta_{SN}]$

Durch das β-Mapping sind somit zur Quantifizierung des Value at Risk die Volatilität eines einzelnen Risikofaktors und die β-Faktoren der Aktien nötig.

Neben dem β-Mapping existiert noch eine zweite Möglichkeit den Value at Risk für ein Aktienportefeuille zu ermitteln. Diese Methode geht von der Varianz-Kovarianzmatrix der Renditen der Aktien im Portefeuille aus und ermöglicht ebenfalls eine sehr einfache Ermittlung des Value at Risk. Es sei R_P die Rendite des Aktienportefeuilles, das sich aus den Aktien S_1 bis S_N zusammensetzt. Diese Rendite kann folgendermaßen berechnet werden:

(12) $R_P = x_{S1} \, R_{S1} + ... + x_{SN} \, R_{SN}$

Wobei x_{Si} angibt, welcher Anteil des Gesamtwertes des Portefeuilles W_0 in die Aktie S_i investiert wird. Der Value at Risk für das Portefeuille ergibt sich analog zur Gleichung (8)

(13) $VaR = W_0 \, 1.65 \, \sigma_P$

wobei σ_P die Volatilität des Portefeuilles darstellt. Diese Volatilität kann mittels Varianz-Kovarianz-Matrix V errechnet werden. Es ergibt sich der Zusammenhang

(14) $\sigma_P = \sqrt{x'Vx}$

mit x als dem Vektor aller Anteile der einzelnen Aktien am Gesamtportefeuille, i.e. $x = (x_{S1}, ..., x_{SN})$. Somit errechnet sich der Value at Risk für das Aktienportefeuille gemäß Varianz-Kovarianz-Methode auf folgende Art und Weise:

(15) $VaR = W_0 \, 1.65 \, \sqrt{x'Vx}$.

Beide Bewertungsansätze liefern im Regelfall unterschiedliche Schätzungen für das Risiko. Während durch das β-Mapping eine einfache Berechnungsform zur Verfügung steht, die mit wenig Information bereits das Auslangen findet (das gesamte Risiko des Aktienportefeuilles wird auf einen Risikofaktor bezogen), ist die Varianz-Kovarianz-Methode entsprechend aufwendiger zu implementieren, greift allerdings auf die gesamte Risikostruktur des Portefeuilles zurück. Es ist daher eine empirische Frage, welche der beiden Methoden eine exaktere Abschätzung des Risikos erlaubt. Daher wird dieser Sachverhalt im Abschnitt 5.2 anhand einer einfachen Analyse, die auf österreichische Fließhandelswerte zurückgreift, näher untersucht.

4. Alternative Volatilitätsmodelle

Nachdem wir im vorangegangenen Abschnitt alternative Bewertungsmethoden für Aktienportefeuilles diskutiert haben, sollen in diesem Kapitel kurz unterschiedliche Verfahren zur Prognose von Volatilitäten vorgestellt werden.[6] Den Ausgangspunkt für die theoretische Fundierung der nachfolgenden Volatilitätsmodelle stellt die Annahme dar, daß sich Wertpapierrenditen aus einem prognostizierbaren Teil, $\mu_t = E_t[R_{t+1}]$ (die auf den Zeitpunkt t bedingte erwartete Rendite), und einem zufälligen Teil, ε_{t+1}, zusammensetzen:

[6] Für eine detaillierte Diskussion über alternative Volatilitätsmodelle verweisen wir den Leser auf Geyer (1992).

$$R_{t+1} = \mu_t + \varepsilon_{t+1}.$$

Aus dieser Formulierung ergibt sich die bedingte Varianz als

$$\sigma_t^2 = E_t\left[R_{t+1}^2\right] - \mu_t^2 \equiv E_t\left[\varepsilon_{t+1}^2\right],$$

die es aus den historischen Renditen zu schätzen gilt. Unterstellt man Tagesdaten, sodaß die erwartete Rendite hinreichend klein und daher nicht weiter berücksichtigt wird, und verwendet man die empirische Beobachtung, daß Wertpapierrenditen durch ein Volatilitätsclustering charakterisiert sind, kann der Volatilitätsschätzer zum Zeitpunkt T als gewogener Durchschnitt vergangener quadrierter Renditen modelliert werden:

$$\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^{k} \omega_i\,(T)\,R_{T+1-i}^2\,.$$

In Abhängigkeit von der Wahl der Gewichte $\omega_i(T)$ können nun verschiedene Volatilitätsmodelle unterschieden werden: (i) die historische Volatilität, bei der die Gewichte konstant bleiben, (ii) die exponentiell gewichtete Volatilität, bei der die Gewichte historischer Volatilitäten exponentiell abklingen und (iii) die (G)ARCH Volatilitäten, wo die Gewichte aus den historischen Daten geschätzt werden.

Die historische oder auch naive Volatilität ist die einfachste und daher auch die populärste Methode zur Schätzung der Volatilitäten einer Renditereihe. Sie unterstellt für die Änderung der Gewichte keine Dynamik, sondern geht von konstanten Gewichten vergangener Beobachtungen aus. Sie wird durch

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R_{T+1-i}^2$$

berechnet, wobei k die Anzahl der Beobachtungen darstellt, die zur Ermittlung des Durchschnittes herangezogen wird. Für die Gewichte gilt $\omega_i(T) = 1/k$.

Das naive Volatilitätsmodell unterliegt zwei Kritikpunkten. Erstens ist nicht klar, nach welchem Kriterium die Periodenlänge k gewählt werden soll. Zweitens legt das Volatilitätsclustering nahe, daß Beobachtungen der jüngeren Vergangenheit ein höheres Gewicht haben sollten als weiter zurückliegende. Das Modell des exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitts (EWMA) berücksichtigt beide Kritikpunkte. Es schätzt die Volatilitäten auf der Basis von

$$\sigma_T^2 = (1-\beta)\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i R_{T+1-i}^2\,,$$

wobei β der Parameter ist, der das exponentielle Gewicht $\omega_i\,(T) = \beta^i\,(1-\beta)$ mit $0 < \beta < 1$ darstellt.

Das EWMA Modell geht bereits von der Idee aus, daß Volatilität durch Persistenz charakterisiert ist, wobei die genaue Form dafür nicht bekannt ist. Engle (1982) führte daher die Klasse der ARCH(p) Modelle ein, wobei die Persistenzparameter auf der Basis vergangener Beobachtungen geschätzt werden und p die Anzahl der Parameter darstellt. Der Volatilitätsschätzer hat somit die Form

$$\sigma_T^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i R_{T+1-i}^2\,,$$

wobei für die Gewichte $\omega_i\,(T) = \alpha_i$ gilt. Das ARCH(p) Modell wurde von Bollerslev (1986) [siehe auch Bollerslev et al. (1992) und (1993)] zum GARCH(p,q) Modell erweitert. Dabei steht die Idee im Vordergrund, daß nicht nur Beobachtungen bis zur Periode p Einfluß auf die Volatilität ausüben, sondern auch dahinterliegende. Daher wird ähnlich wie beim EWMA Modell eine unendliche Persistenz unterstellt, wodurch man das GARCH(p,q) Modell

$$\sigma_T^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i R_{T+1-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{T-i}^2$$

erhält. Beschränkt man sich auf die Klasse der GARCH(1,1) Modelle, ergibt sich in Analogie zu den vorangegangenen Modellbeschreibungen

$$\sigma_T^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_1^{i-1} R_{T+1-i}^2 ,$$

wobei die Gewichte in diesem Fall durch $\omega_i(T) = \alpha_1 \beta_1^{i-1}$ gegeben sind. Aus dieser Formulierung wird ersichtlich, daß das GARCH(1,1) Modell im Falle von $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ mit dem EWMA Modell zusammenfällt. Diese Identität zeigt, daß das EWMA Modell einem nichtstationären GARCH(1,1) Modell entspricht.

Aus der Sicht des praktischen Risikomanagements ist es nun von entsprechender Bedeutung, die Prognosequalitäten der vorgestellten Modelle zu kennen. Deshalb werden in der nachfolgenden empirischen Analyse die einzelnen Modelltypen zur Prognose des Marktrisikos des österreichischen Aktienmarktes auf der Basis des ATX verwendet.

5. Empirische Analyse

5.1 Evaluierung alternativer Volatilitätsmodelle für den österreichischen Aktienmarkt

Die Volatilitätsmodelle des vorangegangenen Abschnittes werden nun zur Pronose des Marktrisikos für den österreichsichen Aktienmarkt herangezogen [vgl. Geyer (1994)]. Als Datenbasis dienen die täglichen Schlußkurse des ATX über den Zeitraum August 1992 bis Februar 1995. Die Stichprobe umfaßt 619 Beobachtungen und wird in zwei Subperioden getrennt. Die Daten der Periode August 1992 bis März 1994 stellen den in-sample Bereich dar. Auf Basis dieser Beobachtungen werden die Parameter im EWMA und in den GARCH Modellen geschätzt. Die Daten der Periode April 1994 bis Februar 1995 dienen im Rahmen von out-of-sample Verfahren zur Beurteilung der Prognosegüte der einzelnen Modelle. Als Gütekriterium dient der normierte mittlere quadratische Fehler (NMSE).

Abbildungen 1 und 2 zeigen die Kursentwicklung und die täglichen Renditen für den gesamten Stichprobenumfang. Aus der Darstellung der Renditen wird das Phänomen des Volatilitätsclusterings deutlich, welches auch die Basis für die Risikomodelle darstellt.

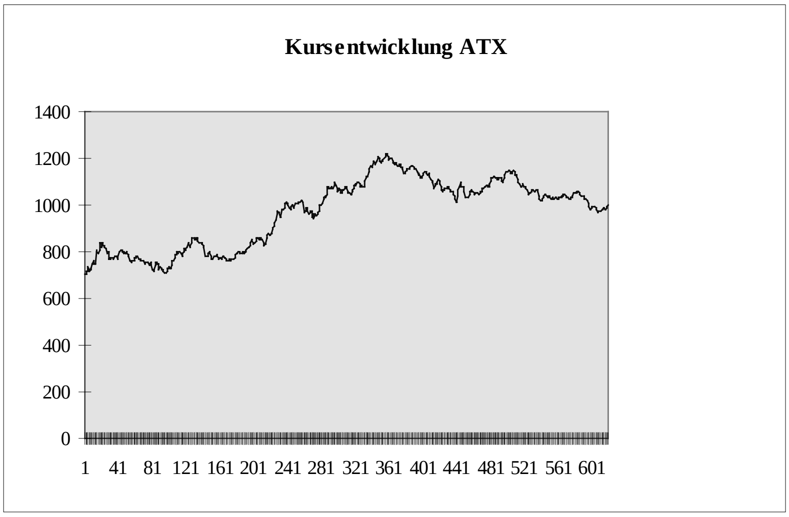

Abbildung 1

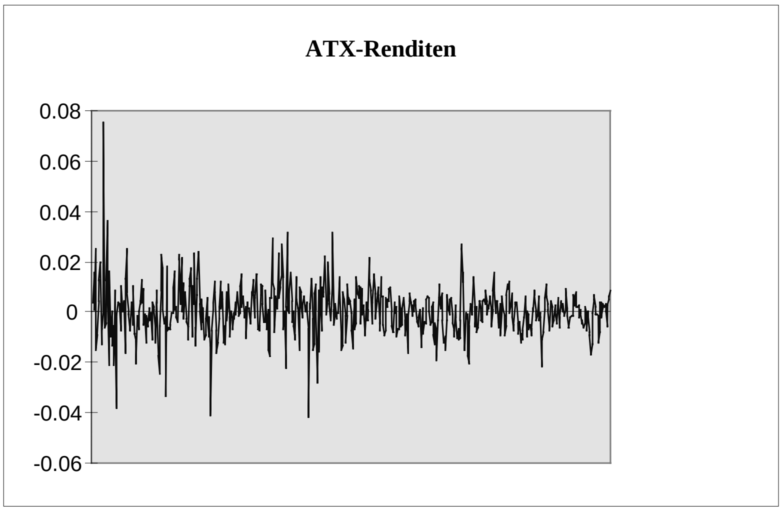

Abbildung 2

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen den NMSE für die in-sample Periode und für die out-of-sample Periode. Daraus können folgende Schlüsse gezogen werden. Das einfache exponentiell geglättete Modell weist in beiden Fällen die beste Prognosegüte auf. Der ATX ist somit durch ein nichtstationäres GARCH(1,1) Modell beschreibbar, wie auch aus den Schätzungen der GARCH Parameter in Tabelle 1 ersichtlich ist. Damit stellt das EWMA-Modell eine adäquate Beschreibung der dynamischen Entwicklung der ATX-Volatilitäten dar. Da das zweite Moment der ATX-Renditen durch einen integrierten Prozeß dargestellt werden kann, ist auch das sehr gute Abschneiden des naiven Volatilitätsmodells plausibel. Für die out-of-sample Periode stellt es das zweitbeste Verfahren dar. Bei den GARCH Modellen wurden zwei Varianten untersucht. Das klassische GARCH(1,1) Modell und das Glosten, Jaganthan und Runkle (GJR) Modell (vgl. Glosten *et al.* 1993). Das GJR Modell berücksichtigt neben dem Volatilitätsclustering auch noch den sogenannten Leverage-Effekt, der bei vielen Renditereihen empirisch nachgewiesen wurde. Er besagt, daß negative Renditen mit höherer Volatilität korrelieren. Die beiden GARCH Modelle weisen eine unterschiedliche Prognosegüte auf. Während sie für die in-sample Periode hinter dem EWMA-Modell rangieren, ist deren Abschneiden für die out-of-sample Periode enttäuschend.

Variable	Koeffizienten	Standardfehler	T-Statistik	Signifikanz
$\mu 0$	0.00086691	0.0005854	1.48089	0.13863534
$\alpha 0$	3.975E-06	2.756E-06	1.44232	0.14921183
$\alpha 1$	0.90828682	0.03076445	29.5239	0
$\beta 1$	0.0593589	0.01267719	4.68234	0.00000284

Tabelle 1

Hier liegt der Schluß nahe, daß bei integrierten Volatilitäten der größere Aufwand bei der Schätzung der Modellparameter mittels GARCH Ansätzen nicht zielführend ist und sogar die naiven Prognosen hinreichend gute Ergebnisse liefern.[7]

[7] Zu ähnlichen Ergebnissen kommen auch Boudoukh et al. (1995).

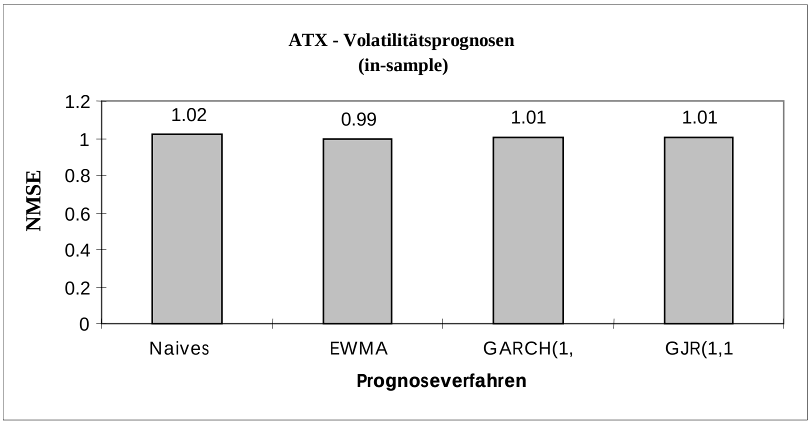

Abbildung 3

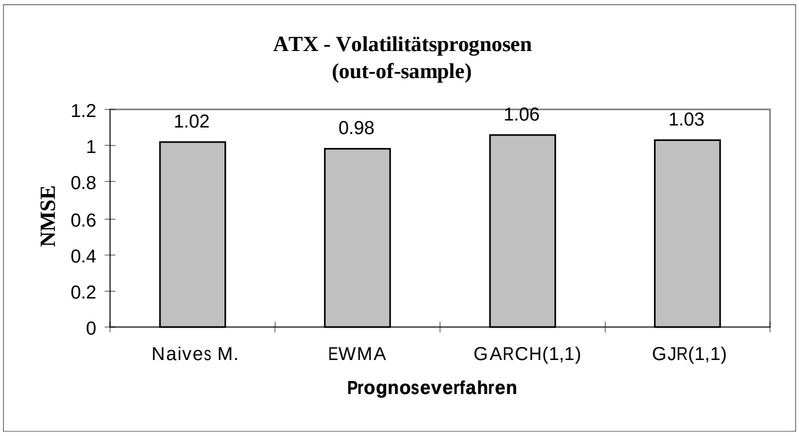

Abbildung 4

5.2 Numerische Ermittlung des Value at Risk für Aktienportefeuilles

In diesem Teil der Arbeit werden nun nach der Evaluierung alternativer Volatilitätsmodelle für den österreichischen Aktienmarkt die Bedeutung der Volatilitätsschätzungen und der Bewertungsmodelle für die Ermittlung des Value at Risk für ein Aktienportefeuille numerisch analysiert. Dazu verwenden wir zwei alternative Aktienportefeuilles mit österreichischen Fließhandelswerten, die in der Tabelle 2 zusammengefaßt sind.

Portefeuille 1:	**Gewichte im Portefeuille**	**Portefeuille 2**	**Gewichte im Portefeuille**
Austrian Airlines	20 %	Flughafen Wien	20 %
CA Vorzug	20 %	OMV	20 %
Flughafen Wien	20 %	VA Tech	20 %
OMV	20 %	Verbund	20 %
VA Tech	20 %	Wienerberger	20 %

Tabelle 2

In beiden Portefeuilles sind die OMV, VA Tech und die Flughafen Wien AG enthalten. Die restlichen Titel wurden auf der Basis von Diversifikationsaspekten hinzugenommen. Für beide Portefeuilles wird der Value at Risk unter Verwendung alternativer Volatilitätsprognosemethoden, dem β-Ansatz und der Kovarianzmethode ermittelt. Als Volatilitätsprognosemethode verwenden wir das naive Modell (gleitender Durchschnitt mit einem konstanten Fenster und konstanten Gewichten) und das exponentiell gewichtete Moving Average Modell. Für letzteres verwenden wir ein exponentielles Gewicht in der Größe von 0,97.[8] Aufgrund der Ergebnisse aus dem Abschnitt 5.1 verzichten wird explizit auf die Ermittlung des Value at Risk auf der Basis eines GARCH-Modells. Tabellen 3 und 4 fassen die Ergebnisse für die beiden Portefeuilles zusammen. Dabei wurde in allen Fällen eine Halteperiode von 10 Tagen, ein Signifikanzniveau von 95 % und ein Portefeuillewert von 10.000 Geldeinheiten unterstellt.

	Historische Volatilität	EWMA-Modell
β-Bewertung	442.28	414.44
Varianz-Kovarianz-Methode	421,14	486,13

Tabelle 3: VaR für Portefeuille 1

	Historische Volatilität	EWMA-Modell
β-Bewertung	447,32	419.16
Varianz-Kovarianz-Methode	310.29	319.16

Tabelle 4: VaR für Portefeuille 2

Aus den Resultaten der Tabellen 3 und 4 lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Wie bereits im Abschnitt 5.1 im Rahmen der empirischen Analyse festgestellt wurde, hat die Methode der Volatilitätsprognose keinen (bzw. nur einen sehr geringen) Einfluß auf die Ermittlung des Value at Risk dieser Aktienportfeuilles. Im Portefeuille 1 (Tabelle 3) variieren die Werte unter Verwendung der β-Bewertung zwischen 442,28 GE und 414,44 GE (d.s. 3 Promille des Portfeuillewertes), bei Verwendung der Varianz-Kovarianz-Methode variieren sie zwischen 421,14 GE und 486,13 GE (d.s. 6 Promille des Portefeuillewertes). Im Portfeuille 2 (Tabelle 4) variieren die Werte der β-Methode zwischen 447,32 GE und 419,16 GE (d.s. 3 Promille des Portfeuillewertes) und bei der Varianz-Kovarianz-Methode zwischen 310,29 GE und 319,16 GE (d.i. 1 Promille des Portefeuillewertes).

Während die Methode zur Prognose der Volatilitäten nur einen geringen Einfluß auf den Value at Risk hat, kann die Wahl des Bewertungsmodells zu singnifikanten Unterschieden führen. Obwohl beim Portefeuille 1 die Untesrchiede gering sind (442,28 GE und 421, 14 GE unter Verwendung der historischen Volatilität und 414,44 GE und 486,13 GE bei Anwendung des EWMA Modells) treten beim Portfeuille 2 signifikante Differenzen auf. Unter Verwendung der historischen Volatilität liegen sie zwischen 447,32 GE und 310,29 GE (d.i. 1,3 % des Portefeuillewertes) bei Anwendung des EWMA-Modells zwischen 419,16 GE und 319,16 GE (d.i. 1 % des Portefeuillewertes). Die Differenzen der beiden Bewertungsmodelle lassen sich auf die unterschiedlichen Diversifikationsmerkmale der verwendeten Portfeuilles und der Bewertungsansätze zurückführen. Während das Portefeuille 1 ähnliche Diversifikationseigenschaften aufweist wie das Marktportefeuille, das in der vorliegenden Arbeit durch den ATX dargestellt wird, kann mit dem Portefeuille 2 ein besserer Diversifikationsgrad als beim Marktportfeuille erreicht werden. Dieser scheinbarer Widerspuch resultiert daraus, daß ein Index (im vorliegenden Fall der ATX) nicht immer ein risikoeffizientes Portefeuille darstellt.

Abschließend soll noch der Einfluß der Verteilungsannahme untersucht werden. Unter Annahme der Normalverteilung errechnet sich der Value at Risk bei einem Konfidenzniveau von 95% als

$$VaR_{Normal} = W_o \cdot 1{,}65\sigma.$$

Ausgehend von den Renditen für den ATX wurde im Rahmen einer Dichte-Schätzung die empirische Verteilung auf Basis einer t-Verteilung ermittelt. Diese Vorgangsweise bietet die Möglichkeit, das Phänomen der dicken Enden der Verteilung zu erfassen. Dadurch ändert sich dann der Quantils-Wert wie folgt:

$$Var_{empirisch} = W_o \cdot 2{,}92\sigma.$$

[8] In dem von JPMorgan entwickelten Modell RiskMetrics ™ wird ebenfalls das EWMA Modell verwendet allerdings wird der Gewichtungsfaktor mit 0.96 festgelegt. Die Wahl von 0.97 in der vorliegenden Arbeit wurde bewußt durchgeführt, um zu zeigen, daß die Resultate gegenüber diesen Änderungen robust sind.

Damit ergeben sich folgende Werte für den Value at Risk der Testportefeuilles

	Historische Volatilität	EWMA-Modell
β-Bewertung	782,70	733,43
Varianz/Kovarianz	745,29	860,30

Tabelle 5: VaR für Portefeuille 1 bei empirischer Verteilung

	Historische Volatilität	EWMA-Modell
ß-Bewertung	791,62	741,79
Varianz-Kovarianz	549,12	564,82

Tabelle 6: VaR für Portefeuille 2 bei empirischer Verteilung

Durch die Berücksichtigung der empirischen Verteilung erhöht sich der Value at Risk für das Portefeuille von ca. 4 % des Portefeuiellewertes auf 6-8 %. Dies ist zu erwarten, da durch die Normalverteilung die Marktrisiken systematisch unterschätzt werden. Allerdings scheint bei Berücksichtigung der empirischen Verteilung die Festlegung eines Streßfaktors in der Höhe von 3-4, wie er z.B. im österreichischen Bankwesengesetz vorgesehen ist, in diesem Ausmaß nicht mehr gerechtfertigt.

6. Abschließende Bemerkungen

In der vorliegenden Arbeit haben wir den Einfluß einzelner Bausteine wie die Wahl des Bewertungsmodells und die Volatilitätsprognose auf die Ermittlung des Value at Risk eines Aktienportefeuilles untersucht. Dabei konnten wir folgende allgemeine Aussagen ableiten. Während die Wahl des Volatilitätsprognosemodells kaum einen Einfluß auf die Größenordnung des Value at Risk eines Portefeuilles hat, kann durch das verwendete Bewertungsmodell oder die Verteilungsannahme ein beträchtlicher Unterschied auftreten. Dieses Ergebnis ist für regulierende Behörden, die die Güte von verwendeten Risikomodellen zu beurteilen haben, von Bedeutung. Es läßt den Schluß zu, daß der Evaluierung von Volatilitätsprognosemodellen nicht die Aufmerksamkeit geschenkt werden muß wie jener von Bewertungsmodellen. Obwohl durch die vorliegende Arbeit die Ergebnisse nur für Aktienportefeuilles ermittelt wurden, können dennoch ähnliche Schlußfolgerungen für Anleihenportfeuilles bzw. Portfeuilles mit derivativen Finanzprodukten erwartet werden. Eine detaillierte Analyse darüber ist für zukünftige Arbeiten geplant.

Literatur

Beckström, R., Campbell, A., 1995, An Introduction to VAR, C-ATS Software Inc., Palo Alto CA.

Bollerslev, T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics 31 (3), 307-328.

Bollerslev, T., Chou, R., Kroner, K., 1992, ARCH Modelling in Finance, Journal of Econometrics, 5-59.

Bollerslev, T., Engle, R., Nelson, D., 1993, ARCH-Models, Discussion Paper, 93-49, UCSD.

Boudoukh, J., Richardson, M. und Whitelaw, R.F., 1995, Taking the Pain out of Volatility Estimation. Manuskript Stern School of Business, New York University.

Bühler, W., Korn, O., Schmidt, A., Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit "Internen Modellen", Arbeitspapier Universität Mannheim, 1997.

Engle, R.F., 1982, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica 50 (4), 987-1008.

Geyer, A., 1992, Information, Erwartung, Risiko, VVF

Geyer, A., 1994, Volatility Estimates of the Vienna stock market, Applied Financial Economics, 449-55.

Glosten, L.R., Jagannathan, R., und Runkle R., 1993, Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Normal Excess Return on Stocks. Journal of Finance 48, 1779-1801.

Jorion, P., 1995, Value at Risk. The New Standard for Controlling Market Risk. Manuskript, University of California - Irvine.

Lintner, J., 1965, The Valuation of Risk Assets and the Selection of Ristay Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, Review of Economics and Statistics 47, 13-37.

JP Morgan, 1995, RiskMetricsTM Technical Document.