Über die Busy Period von Er/M/1 Systemen. Ein kombinatorischer Beweis

Böhm, Walter

DOI:
10.57938/946c56a4-778e-497a-b8ea-475645761048

Published: 01/01/1991

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Über die Busy Period von E_r/M/1 Systemen. Ein kombinatorischer Beweis

Walter Böhm

Institut für Statistik
Wirtschaftsuniversität Wien

Forschungsberichte

Bericht 23
1991

http://statmath.wu-wien.ac.at/

Über die Busy Period von $E_R/M/1$ Systemen. Ein kombinatorischer Beweis

Walter Böhm

Die analytische Herleitung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Busy Period in Warteschlangenmodellen mit exponentiellen Service- und Erlang verteilten Zwischenankunftszeiten ist mit beträchtlichem Aufwand verbunden. Eine vergleichsweise elementare Lösung wird möglich durch Anwendung von Methoden der Gitterpfadkombinatorik.

1 Einleitung

In dieser Notiz betrachten wir ein Warteschlangensystem mit einem Server, der ankommende Kunden einzeln abfertigt, wobei die Servicezeiten unabhängig und identisch exponentialverteilt sind mit Erwartungswert $1/\mu$. Wir nehmen weiterhin an, daß die Zeitintervalle zwischen aufeinanderfolgenden Ankünften ebenfalls unabhängig und identisch verteilt sind mit Dichte

$$a(t) = \frac{e^{-\lambda t}\lambda^R t^{R-1}}{(R-1)!},$$

wobei $R \geq 1$ eine ganze Zahl sein soll.

Mit $Q(t)$ bezeichnen wir die Zahl der Kunden, die zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ im System warten. Von besonderem Interesse in vielen praktischen Anwendungen ist die Dauer der Busy Period, also der Zeit bis die Warteschlange, ausgehend von einem fixen Anfangsbestand an Kunden, das erste mal leer ist, kurz

$$T_k = \inf\{t : Q(t) = 0, Q(0) = k\}. \tag{1}$$

Die analytische Herleitung der Dichte dieser Stopvariablen, $f_m(t)$, gestaltet sich überaus schwierig (Keilson(1964)). Umso überraschender ist es, daß man eine Darstellung von $f_k(t)$ mit Hilfe einfacher kombinatorischer Überlegungen finden kann.

Zu diesem Zweck wollen wir dem Modell eine etwas andere Deutung geben, die im wesentlichen auf Erlang zurückgeht: wir können uns vorstellen, daß ankommende Kunden nicht sofort in das System eintreten können, sondern zunächst R Phasen durchlaufen müssen, wobei die Verweilzeit in jeder Phase exponentialverteilt ist mit Erwartungswert $1/\lambda$. Wenn nun $Q_0(t)$ die Zahl der Phasen im System zur Zeit t bezeichnet, dann gilt stets

$$Q_0(t) = RQ(t) + i, \qquad 0 \le i < R,$$

das heißt, daß $Q(t)$ Kunden bereits im System warten und ein Kunde sich in der i-ten Ankunftsphase befindet. Wird das Service eines Kunden abgeschlossen, so verlassen R Phasen das System. Wenn wir also Phasen als Kunden auffassen, dann ist das oben beschriebene Modell äquivalent einem M/M/1 Modell, in dem die Zwischenankunftszeiten exponentialverteilt sind mit Erwartungswert $1/\lambda$ und die Kunden in Gruppen fixer Größe $R \ge 1$ abgefertigt werden. Wir können daher völlig gleichwertig anstelle von (1) auch die Stopvariable

$$\tau_{m,i} = \inf\{t : Q_0(t) = i, Q_0(0) = m\}, \qquad 0 \le i < R \tag{2}$$

mit Dichtefunktion $f_{m,i}(t)$ betrachten.

2 Ein kombinatorisches Argument

Um die Dichte $f_{m,i}(t)$ zu bestimmen, wollen wir die Folge der Ankünfte und Abfertigungen von Kunden durch einen zweidimensionalen Gitterpfad darstellen. Dabei entspricht einer Ankunft ein horizontaler Schritt und der Abfertigung einer Gruppe der Größe R ein vertikaler Schritt. Ein typischer Pfad könnte folgendes Aussehen haben:

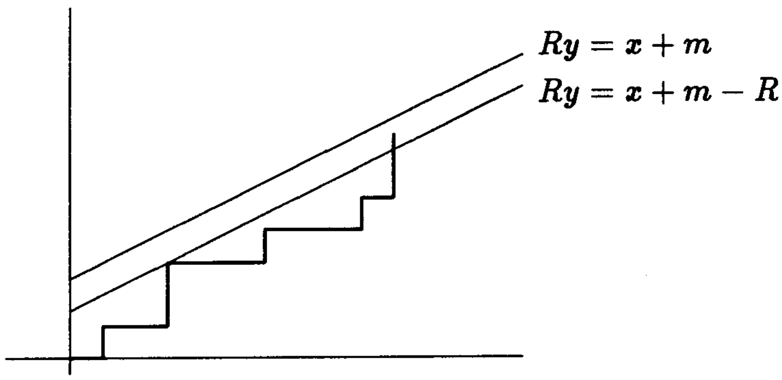

Abb. 1

Betrachten wir nun eine Busy Period, die von m Kunden initiiert wurde, mit $0 \leq i < R$ Kunden endet, n_1 Ankünfte und $n_2 + 1$ Abfertigungen umfaßt. Dabei muß für die Zahl der Abfertigungen und Ankünfte gelten $m + n_1 - Rn_2 = R + i$. Die korrespondierenden Gitterpfade verlaufen von $(0,0)$ nach $(n_1, n_2 + 1)$ und kreuzen im letzten Schritt zum ersten mal die Gerade $Ry = x + m - R$. Da der letzte Schritt vertikal sein muß, genügt es, die Zahl der Pfade vom Ursprung nach (n_1, n_2) zu bestimmen, welche die Gerade $Ry = x + m - R$ nicht kreuzen. Ein bloßes Berühren dieser Geraden ist freilich erlaubt, denn das bedeutet ja nur, daß in einem beliebigen Berührungspunkt noch R Kunden, somit eine vollständige Gruppe, im System verbleiben. Wir beschränken uns daher auf Pfade, welche die Gerade $Ry = x + m - R + 1$ weder kreuzen noch berühren.

Die Zahl dieser Pfade ist bekannt und kann in Form einer Determinante von der Ordnung $n_2 \times n_2$ angebenen werden (Mohanty (1979, p. 32)). Eine viel einfachere Lösung ergibt sich aber mit Hilfe des verallgemeinerten Ballot Theorems. Es besagt (Mohanty (1979, p. 8)), daß die Zahl der Pfade von $(0,0)$ nach (n_1, n_2), welche die Gerade $Ry = x$ mit Ausnahme des Anfangspunktes weder kreuzen noch berühren, gegeben ist durch

$$\frac{n_1 - Rn_2}{n_1 + n_2}\binom{n_1 + n_2}{n_1}.$$

Um dieses Theorem auf das vorliegende Problem anwenden zu können, zerlegen wir die Menge aller Pfade P von $(0,0)$ nach (n_1, n_2) in zwei disjunkte Teilmengen: die Menge P_0 der Pfade, welche die Gerade $Ry = x + m - R + 1$ weder kreuzen nach berühren, und die Menge P_1, welche mindestens einmal kreuzen oder berühren. Es gilt dann

$$|\mathsf{P}| = |\mathsf{P}_0| + |\mathsf{P}_1|,$$

wobei

$$|\mathsf{P}| = \binom{n_1 + n_2}{n_2} = \binom{n_2(R+1) - m + R + i}{n_2}.$$

Ein typischer Repräsentant aus der Menge P_1 ist in der Abbildung 2 wiedergegeben.

Die Abbildung zeigt, daß jeder Pfad in P_1 sich aus zwei Segmenten zusammensetzt, einem Segment, das vom Ursprung zu einem Punkt $(Rj - m + R - 1, j), Rj \geq m - R + 1$, führt, aber ansonsten beliebig ist, und einem Segment, das von $(Rj - m + R - 1, j)$ nach $(Rn_2 - m + R + i, n_2)$ verläuft, ohne (mit Ausnahme des Angangspunktes) die Gerade $Ry = x + m - R + 1$ zu berühren.

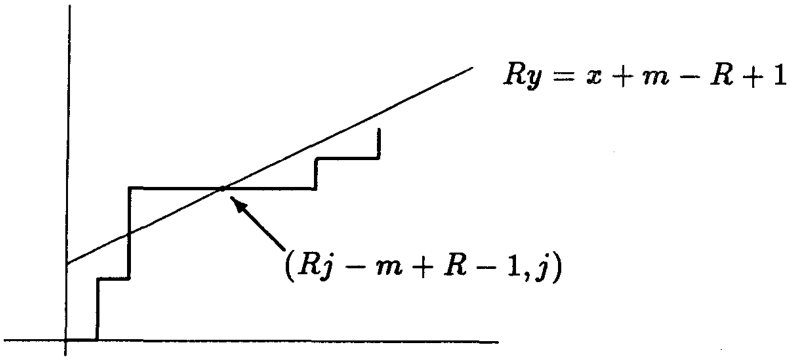

Abb. 2

Die Zahl der Segmente zu Beginn dieser Pfade ist aber

$$\binom{j(R+1) - m + R - j}{j},$$

und für die Zahl der Segmente nach dem letzten Kreuzungs- bzw. Berührungspunkt finden wir mit Hilfe des Ballot Theorems

$$\frac{1+i}{(n_2 - j)(R+1) + i + 1}\binom{(n_2 - j)(R+1) + i + 1}{n_2 - j}.$$

Es ist daher

$$|\mathsf{P}_1| = \sum_{j \geq c} \frac{1+i}{(n_2 - j)(R+1) + i + 1}\binom{(n_2 - j)(R+1) + i + 1}{n_2 - j}\binom{j(R+1) - m + R - 1}{j},$$

wobei $c = [\frac{m-R+1}{R}]$. Oder nach Änderung des Summationsindexes von j auf $n_2 - j$:

$$|\mathsf{P}_1| = \sum_{j=0}^{n_2 - c} \frac{i+1}{i+1+j(R+1)}\binom{i+1+j(R+1)}{j}\binom{(n_2 - j)(R+1) - m + R - 1}{n_2 - j}. \tag{3}$$

Es ist in diesem Zusammenhang interessant zu bemerken, daß wenn wir in (3) die Summation ausdehnen auf alle Werte $j \geq 0$, wir aufgrund einer bemerkenserten kombinatorischen Identität von Gould (1956) erhalten

$$\binom{n_2(R+1) - m + R + i}{n_2},$$

nicht anderes als gerade $|\mathsf{P}|$. Da weiters $|\mathsf{P}| = |\mathsf{P}_0| + |\mathsf{P}_1|$, folgt

$$\begin{aligned} |\mathsf{P}_0| &= \sum_{j > n_2 - c} \frac{i+1}{i+1+j(R+1)}\binom{i+1+j(R+1)}{j}\binom{(n_2 - j)(R+1) - m + R - 1}{n_2 - j} \\ &= \Delta_{i,m}. \end{aligned}$$

Wegen der Markoff Eigenschaft des Prozesses $Q_0(t)$ sind die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade aus P_0 unter der Bedingung, daß im Intervall $(0, t)$ n_1 Ankünfte und n_2 Abfertigungen erfolgen, gleich, nämlich

$$\binom{n_2(R+1)-m+R+i}{n_2}^{-1} \Delta_{i,m}.$$

Wir finden somit

$$P(Q_0(t) = R+i, Q_0(s) \geq R, 0 \leq s \leq t | Q_0(0) = m) = \tag{4}$$

$$= \sum_{n_2} \Delta_{i,m} \binom{n_2(R+1)-m+R+i}{n_2}^{-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{Rn_2-m+R+i}}{(Rn_2-m+R+i)!} \times$$

$$\times \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{n_2}}{n_2!}$$

$$= \sum_{n_2} \frac{\Delta_{i,m}}{(n_2(R+1)-m+R+i)!} e^{-(\lambda+\mu)t} \lambda^{Rn_2-m+R+i} \mu^{n_2} t^{n_2(R+1)-m+R+i}$$

und damit

$$f_{m,i}(t) = \sum_{n_2} \frac{\Delta_{i,m}}{(n_2(R+1)-m+R+i)!} e^{-(\lambda+\mu)t} \lambda^{Rn_2-m+R+i} \mu^{n_2+1} t^{n_2(R+1)-m+R+i} \tag{5}$$

3 Literatur

[1] Gould H. W. (1956) Some generalizations of Vandermonde's convolution. *Amer. Math. Monthly*, **63**, 84-91.

[2] Keilson J. (1964) Some comments on single server queueing models and some new results. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **60**, 237-251.

[3] Mohanty S.G. (1979) *Lattice Path Counting and Applications.* Academic Press, New York.